$v(x,t) = \cos 2t \cdot \sin x + \frac{1}{16}(1-\cos ut)\sin 2x$

$u(x,t) = \sin 2t + \cos 2t \cdot \sin x + \frac{1}{16}(1-\cos ut)\sin 2x$

المحاضرة السابعة:

مبدأ القيمة العظمى: إذا كانت الدالة $u(x,t)$ المعرفة والمتصلة في المنطقة $0 \leq t \leq T,\ 0 \leq x \leq l$ تحقق معادلة التوصيل الحراري المتجانسة $u_t = a u_{xx}$ في المنطقة $0 \leq t \leq T,\ 0 \leq x \leq l$ فإن الدالة $u(x,t)$ تصل إلى قيمتها العظمى أو الصغرى إما في اللحظة الابتدائية $t = 0$ وإما في نقطتي الحدود $x = 0\ ,\ x = l$

نظرية الوحدانية: سوف نثبت وحدانية الحل لمعادلة التوصيل الحراري بالاعتماد على مبدأ القيمة العظمى.

* **نظرية**: إذا كانت الدالتان $u_1(x,t)\ ,\ u_2(x,t)$ المعرفتان والمتصلتان في المنطقة $0 \leq x \leq l,\ 0 \leq t \leq T$ وتحققان معادلة التوصيل الحراري

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad \text{---} \ (1)$$

وتحققان الشروط الحدية الابتدائية نفسها

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \varphi(x)$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = \mu_1(t)$$

$$u_1(l,t) = u_2(l,t) = \mu_2(t)$$

$u_1(x,t) = u_2(x,t)$ اي للمعادلة حل وحيد

البرهان: البرهان هذه النظرية تدرس الدالة.

$$v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t) \quad (3)$$

بما أن الدالتان $u_1(x,t),\ u_2(x,t)$ ~~متصلة~~ متصلتان في المنطقة

Date : / / Subject:

$0 < x < l$, $0 < t \leq T$ عندئذ تكون الدالة $v(x,t)$ التي تساوي الفروق تكون دالة مستمرة ومتصلة.

وبما أن $v(x,t)$ هي دالة الفرق بين حلين لمعادلة التوصيل الحراري في المنطقة $0 < x < l , 0 \leq t \leq T$

وبالتالي فهي تحقق معادلة التوصيل الحراري المتجانسة وذلك لأن:

بما أن $u_1(x,t)$ حل للمعادلة المعطاة (1) هذا يعني أن هذا الحل يحقق المعادلة

$$u_{1t} = a^2 u_{1xx} + f(x,t)$$

بما أن $u_2(x,t)$ حل للمعادلة (1) وهو يحققها

$$u_{2t} = a^2 u_{2xx} + f(x,t)$$

بالطرح نجد $(u_1 - u_2)_t = a^2 (u_{1xx} - u_{2xx})$

وبالاعتماد على العلاقة (3) نحصل على:

$$v_t = a^2 v_{xx}$$

وبالتالي فإن مبدأ القيمة العظمى ينطبق على هذه الدالة أي أنها تصل إلى قيمتها العظمى أو الصغرى عند $t=0$ أو $x=0$ أو $0<l<l$

من العلاقات ② و ③ نجد:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) - \varphi(x) = v(x,0) = 0 \\ v(0,t) = 0 \qquad v(l,t) = 0 \end{array}\right\} (4)$$

ومنه حسب مبدأ القيمة العظمى والعلاقات الـ (4) نجد أن

$$v(x,t) = 0$$

وبالتالي فإن $u_2(x,t) - u_1(x,t) = 0$

$u_2 = u_1$ للمعادلة حل وحيد

Date : / / Subject:

نظرية (2) بفرضان $u_1(x,t)$ ، $u_2(x,t)$ حلان للمعادلة التوصيل الحراري ونفرض أن هذان الحلان يحققان الشروط الأتية :

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

1) - $u_1(x,0) \leq u_2(x,0)$

2) - $u_1(0,t) \leq u_2(0,t)$

3) - $u_1(\ell,t) \leq u_2(\ell,t)$

عندئذٍ اثبت ان $u_1(x,t) \leq u_2(x,t)$ لجميع قيم $0 \leq t \leq T$ ، $x \leq \ell$

البرهان : نشكل اللزوم $v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$
عندئذٍ الدالة $v(x,t)$ تحقق الشروط التي اثبتناها مبدأ القيمة العظمى اي ان الدالة $v(x,t)$ تحقق الدالة المعطاة وهي دالة مستمرة ومتصلة وأيضاً من الشروط المعطاة في هذه نص هذه النظرية نجد أن :

$$v(x,0) \geq 0$$

$$v(0,t) \geq 0$$

$$v(\ell,t) \geq 0$$

وبالتالي فإن $v(x,t) \geq 0$ في المنطقة $0 \leq t \leq T$ ، $0 < x < \ell$
وإلا فإن الدالة $v(x,t)$ كان سيصبح لها قيمة عظمى صغرى سالبة في المنطقة $0 < t \leq T$ ، $0 < x < \ell$ وهذا غير صحيح.

Date : / /   Subject:

طريقة فصل المتغيرات (طريقة فورية)

دراسة معادلة التوصيل الحراري المتجانسة :

أوجد حل معادلة التوصيل الحراري المتجانسة

$u_t = a^2 u_{xx}$ ، $0<x<\ell$, $0<t\leq T$ (1)

والمحقق للشرط الابتدائي (2) $u(x,0)=\varphi(x)$, $0\leq x\leq \ell$

والشروط الحدية المتجانسة (3) $u(0,t)=0$, $u(\ell,t)=0$; $0\leq t\leq T$

الحل : سوف نبحث عن حل المعادلة (1) الذي لا يساوي الصفر بالتطابق ويحقق الشروط الحدية المتجانسة (3) والتي يعبر عنها بالآتي

$u(x,t)=X(x)\,T(t)$ (4)

علماً أن X تابعة لـ x فقط و T تابع لـ t فقط

نشتق العلاقة (4) مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x وبالتعويض بالعلاقة (1) نجد

$$u_t = X T'$$
$$u_x = X' T$$
$$u_{xx} = X'' T$$
$$X T' = a^2 X'' T$$

نقسم على $X\,T\,a^2\neq 0$ نحصل على

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda \; ; \lambda>0$$

علماً أن λ مقدار ثابت

حتى نحصل على حلول غير تافهة سوف نأخذ $\lambda>0$

من هذه العلاقة نحصل على :

$$X''+\lambda X=0 \quad (5)$$
$$T'+\lambda a^2 T=0 \quad (6)$$

من الشروط الحدية (3) والعلاقة (4) نحصل على :

$$X(0)=X(l)=0 \quad (7)$$

ومن ذلك التعيين الدالة $X(x)$ وحصلنا على مسألة القيم الذاتية التالية

$$\left.\begin{array}{l} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{array}\right\} (8)$$

$$\rho^2=\lambda=0 \Rightarrow \rho^2=-\lambda=\lambda i^2 \rightarrow \rho=\mp\sqrt{\lambda}i$$

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

من الشروط المرافقة نحصل على:

$$0=C_1$$

$$0=C_1\cos\sqrt{\lambda}l+C_2\sin\sqrt{\lambda}l$$

$$\Rightarrow C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}l=0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\lambda}l=n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{l};(n,1,2,\ldots)$$

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

هذه القيم الابتدائية تقابلها حلول غير تافهة للمعادلة (5)

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$$

ومن أجل القيم الذاتية λ_n نجد حل المعادلة (6)

$$T'+\lambda a^2T=0 \Rightarrow \frac{dT}{T}=-\lambda a^2dt$$

$$\ln\frac{T_n}{C_n}=-\lambda_n a^2t$$

$$T_n=C_ne^{-\lambda_n a^2t} \Rightarrow T_n=C_ne^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t}$$

بالاعتماد على العلاقة (4) نحصل على الحلول الخاصة بالشكل

$$U_n(x,t)=C_ne^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x;n=1,2,\ldots)$$

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x \quad (9)$$

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} G(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi \, d\xi$$

ملاحظة: يمكن كتابة الحل على الشكل التالي: (نظري فقط)

$$u(x,t) = \int_0^{\ell} G(x,\xi,t)\, G(\xi)\, d\xi$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi$$

هذه الدالة تسمى دالة التأثير الحراري لمصدر حراري لحظي نقطي أو دالة المصدر النقطية.

ملاحظة: إذا أعطيت الشروط الحدية على الشكل التالي:

$$u_x(0,t) = 0 , \quad u(\ell,t) = 0$$

عندئذ لإيجاد الحل العام للمسألة في هذه الحالة نبدل كل n بـ $\frac{2n+1}{2}$ والسلسلة تبدأ من $n = 0$ ونبدل كل $\sin$ بـ $\cos$.

تطبيق: أوجد حل المعادلة $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < 1$, $0 < t < T$ في المنطقة $(0 \le x \le 1 , 0 \le t \le T)$ والذي يحقق الشروط الحدية

$$u(0,t) = 0 , \quad u(1,t) = 0 \quad (3)$$

والذي يحقق الشرط الابتدائي:

$$u(x,0) = G(x) = \begin{cases} 2x ; & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2(1-x) , & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} \quad (2)$$

الحل: حل المسألة المعطاة تعطى بالدستور الآتي

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x , \; a = 1 , \ell = 1$$

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi n \quad (4)$

$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} G(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell}\xi \, d\xi = 2 \int_0^1 G(\xi) \sin n\pi\xi \, d\xi$

$= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \xi \sin n\pi\xi \, d\xi + 4 \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-\xi) \sin n\pi \xi \, d\xi$

$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \xi \sin n\pi\xi \, d\xi = \frac{-1}{n\pi} \cos n\pi\xi \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n\pi}$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos n\pi\xi \, d\xi = \frac{-1}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{(n\pi)^2} \sin n\pi\xi \Big|_0^{\frac{1}{2}}$

$I_1 = \frac{-1}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2}$

$I_2 = \frac{-1}{n\pi} (1-\xi) \cos n\pi\xi \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{n\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos n\pi\xi \, d\xi$

$= \frac{1}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{(n\pi)^2} \sin n\pi\xi \Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$

$= \frac{1}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2}$

$C_n = 4 \left[\frac{2}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right]$

$C_n = \frac{8}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2}$

$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-(n\pi)^2 t} \sin \frac{n\pi}{2} \sin n\pi x$

Date : / / Subject:

معادلة التوصيل الحراري غير المتجانسة مع شروط حدية صفرية

أوجد حل المعادلة: $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ ①

والمحقق للشرط الابتدائي $u(x,0) = \varphi(x)$ ②

والشروط الحدية متجانسة $u(0,t) = 0,\ u(\ell,t) = 0;\ t \geq 0$, (3)

الحل: لحل هذه المسألة نجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة والمحقق للشرط الابتدائي الصفري $u(x,0) = 0$ (4)

ثم نضيف إلى هذا الحل حل المعادلة المتجانسة

سوف نبحث عن الحل الخاص في شكل سلسلة فورييه بالدوال الذاتية

سوف نبحث عن الحل الخاص في شكل $\sin \frac{n\pi}{\ell} x$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad ⑤$$

علماً أن $u_n(t)$ هي عبارة عن الدالة المجهولة وتابعة لـ t فقط

معتبرين عند ذلك بارامتري و $u_n(t)$ دوال مجهولة

ونطلب تعيينها ومن ثم لتعيين الدالة $u(x,t)$ يجب تعيين الدوال $u_n(t)$

من أجل ذلك نمثل $f(x,t)$ كـ شكل سلسلة

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi, t) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi \, d\xi$$

نشتق العلاقة 5 مرة واحدة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x ونبدل في ① نجد

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

$$u_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right) u_n(t) \cos \frac{n\pi}{\ell} x$$

$$u_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 u_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n'(t) + \left(\frac{a n\pi}{\ell}\right)^2 u_n(t) \right] \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

Date : / / Subject:

$$u'_x(t) - \left(\frac{an\pi}{e}\right)^2 u_x(t) = f_n(t) \quad (7)$$

وباستعانة بالشرط الابتدائي للدالة $u(x,t)$ من العلاقة ⑤، ⑥

نجد: $0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_x(0)\sin\frac{n\pi}{e}x \Rightarrow u_x(0) = 0 \quad (8)$

حل المسألة (7) و (8).

المعادلة (7) هي المعادلة التفاضلية خطية تابعة لمجهول u_x والمتحول t

$$\mu(t) = e\int\left(\frac{an\pi}{e}\right)^2 dt = e\left(\frac{an\pi}{e}\right)^2 t$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل هذا نحصل على معادلة تامة تكتب بالشكل التالي لنبدل في المعادلة المعطاة:

$$\left[e\left(\frac{n\pi a}{e}\right)^2 t\, u_x(t)\right]' = e\left(\frac{n\pi a}{e}\right)^2 t\, f_n(t)$$

بالمكاملة نحصل على:

$$e\left(\frac{n\pi a}{e}\right)^2 u_x(t) = \int_0^t e\left(\frac{n\pi a}{e}\right)^2 \tau\, f_n(\tau)\, d\tau + c$$

بالاعتماد على العلاقة (8) نجد أن: $C=0 \Leftarrow$

$$u_x(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{e}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau$$

وبالتالي بعد التبديل $u_x(t)$ في العلاقة (5) نحصل على الحل الخاص المطلوب

وأخيراً حل المسألة يعطى بالعلاقة التالية:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{e}\right)^2} \sin\frac{n\pi}{e}x\, t$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi}{e}x$$

علماً أن: $c_n = \frac{2}{e}\int_0^e \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{e}\xi\, d\xi$

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{e}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(\xi, t)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\, d\xi$$

ملاحظة هامة: عندما يقول لنا أوجد حل المعادلة والمحقق للشروط الابتدائية $U(x,t)=0=\varphi(x)$ والشروط الحدية الصفرية فيكون المطلوب منا الحل الخاص فقط

المسألة الحدية العامة لمعادلة التوصيل الحراري:

أوجد حل المعادلة:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad (1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي (2) $u(x,0)=\varphi(x)$

$$u(0,t) = \mu_1(t) \ , \ u(\ell,t) = \mu_2(t) \qquad (3)$$

الحل: سوف نبحث عن حل المعادلة من الشكل

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t) \qquad \boxed{4}$$

حيث $v(x,t)$ دالة مجهولة جديدة والتي تمثل الانحراف عن دالة ما معلومة $U(x,t)$.

نشتق u مرة بالنسبة لـ t ومرتين بالنسبة لـ x:

$$u_t = U_t(x,t) + v_t(x,t)$$

$$u_x = U_x(x,t) + v_x(x,t)$$

$$u_{xx} = U_{xx}(x,t) + v_{xx}(x,t)$$

نعوض في ①

$$v_t = a^2 U_{xx} + (a^2 U_{xx} - U_t + f(x,t))$$

أو

$$v_t = a^2 U_{xx} + \bar{f}(x,t) \qquad (5)$$

حيث:

$$\bar{f}(x,t) = a^2 U_{xx} - U_t + f(x,t)$$

والدالة $v(x,t)$ تحقق الشرط الابتدائي الآتي (من ② و ④)

Date : / / Subject:

$$v(x,0) = \varphi(x) \Rightarrow U(x,0) = \overline{\varphi}(x) \quad (6)$$

وأيضاً تحقق الشروط الحدية الجديدة التالية في (3) و (4).

★ $\mu_1(t) = U(0,t) + v(0,t) \Rightarrow v(0,t) = \mu_1(t) - U(0,t)$
$= \overline{\mu}_1(t)$

★ $\mu_2(t) = U(\ell,t) + v(\ell,t) \Rightarrow v(\ell,t) = \mu_2(t) - U(\ell,t)$
$= \overline{\mu}_2(t)$

كي نحصل على شروط حدية صفرية نختار الدالة $U(x,t)$ بالشكل التالي

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{\ell}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right)$$

في هذه الحالة نحصل على: $\overline{\mu}_1(t) = \overline{\mu}_2(t) = 0 \Leftarrow$

$$\Rightarrow v(0,t) = 0 \,,\; v(\ell,t) = 0 \quad (7)$$

وبالتالي المسألة الحدية المعطاة تحولت إلى مسألة حدية جديدة وهي (2) و(6) و(7)

ذات شروط حدية صفرية وبالتالي حل المسألة هو عبارة عن

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{\ell}x + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

علماً أن:

$$C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \overline{\varphi}(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi \, d\xi$$

$$v_n(t) = \int_0^{t} e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau$$

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \overline{f}(\xi,t)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi \, d\xi$$

Date : / / Subject:

. نعوض من [4] فنحصل على الحل العام المطلوب :

. **ملاحظة** : اذا أعطيت الشروط الحدية على الشكل الآتي :

. عندئذ نختار $u_x(0,t) = \mu_1(t)$, $u(\ell,t) = \mu_1(t)$

. وفي الدساتير السابقة نبدل كل n بـ $\frac{2n+1}{2}$ والسلسلة

. تبدأ من الصفر ونبدل كل sin بـ cos .